Chapitre 3

Probabilité sur un ensemble fini

1. Vocabulaire

1.1 Expérience aléatoire

Définitions :

1. Vocabulaire

1.1 Expérience aléatoire

Définitions :

- **Expérience aléatoire**

Définitions :

- **Expérience aléatoire**

  Une **expérience** est dite **aléatoire** lorsque le hasard en rend le résultat incertain.

1. Vocabulaire

1.1 Expérience aléatoire

Définitions :

- **Expérience aléatoire**

  Une **expérience** est dite **aléatoire** lorsque le hasard en rend le résultat incertain.

- **Issue**

1. Vocabulaire

1.1 Expérience aléatoire

Définitions :

- **Expérience aléatoire**

  Une **expérience** est dite **aléatoire** lorsque le hasard en rend le résultat incertain.

- **Issue**

  Tout résultat possible de l'expérience aléatoire.

Définitions :

- **Expérience aléatoire**

  Une **expérience** est dite **aléatoire** lorsque le hasard en rend le résultat incertain.

- **Issue**

  Tout résultat possible de l'expérience aléatoire.

- **Univers**

1. Vocabulaire

1.1 Expérience aléatoire

Définitions :

- **Expérience aléatoire**

  Une **expérience** est dite **aléatoire** lorsque le hasard en rend le résultat incertain.

- **Issue**

  Tout résultat possible de l'expérience aléatoire.

- **Univers**

  L'ensemble de toutes les issues possibles de l'expérience. On note l'univers Ω (lire "Omega").

1. Vocabulaire

1.1 Expérience aléatoire

Exemples :

Expérience aléatoire	**Nombres d'issues possibles**	**Univers associé**
1) On lance un dé à 6 faces et on s'intéresse au nombre obtenu sur la face supérieure.	6 issues possibles.	$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
2) On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes et on s'intéresse à cette carte.	32 issues possibles.	L'univers est l'ensemble des 32 cartes.
3) On lance simultanément deux pièces de monnaie et on s'intéresse à leurs faces visibles.	3 issues.	$\Omega = \{PP; FP; FF\}$.
4) On choisit au hasard un entier naturel.	Une infinité.	$\Omega = \mathbb{N}$.

Définitions :

Définitions :

- **Événement**

Définitions :

- **Événement**

  Un **événement** A est un sous-ensemble (une partie) de l'univers Ω.

  On dit qu'**une issue réalise un événement** A lorsque cette issue est un résultat appartenant à l'ensemble A.

Définitions :

- **Événement**

  Un **événement** A est un sous-ensemble (une partie) de l'univers Ω.

  On dit qu'**une issue réalise un événement** A lorsque cette issue est un résultat appartenant à l'ensemble A.

- **Événement élémentaire**

Définitions :

- **Événement**

  Un **événement** A est un sous-ensemble (une partie) de l'univers Ω.

  On dit qu'**une issue réalise un événement** A lorsque cette issue est un résultat appartenant à l'ensemble A.

- **Événement élémentaire**

  C'est un événement qui contient qu'**une seule issue.**

Définitions :

- **Événement**

  Un **événement** A est un sous-ensemble (une partie) de l'univers Ω.

  On dit qu'**une issue réalise un événement** A lorsque cette issue est un résultat appartenant à l'ensemble A.

- **Événement élémentaire**

  C'est un événement qui contient qu'**une seule issue.**

- **L'événement impossible**

Définitions :

- **Événement**

  Un **événement** A est un sous-ensemble (une partie) de l'univers Ω.

  On dit qu'**une issue réalise un événement** A lorsque cette issue est un résultat appartenant à l'ensemble A.

- **Événement élémentaire**

  C'est un événement qui contient qu'**une seule issue.**

- **L'événement impossible**

  C'est l'ensemble vide noté $\emptyset$: **aucune issue ne se réalise.**

Définitions :

- **Événement**

  Un **événement** A est un sous-ensemble (une partie) de l'univers Ω.

  On dit qu'**une issue réalise un événement** A lorsque cette issue est un résultat appartenant à l'ensemble A.

- **Événement élémentaire**

  C'est un événement qui contient qu'**une seule issue.**

- **L'événement impossible**

  C'est l'ensemble vide noté $\emptyset$: **aucune issue ne se réalise.**

Définitions :

- **Événement**

  Un **événement** A est un sous-ensemble (une partie) de l'univers Ω.

  On dit qu'**une issue réalise un événement** A lorsque cette issue est un résultat appartenant à l'ensemble A.

- **Événement élémentaire**

  C'est un événement qui contient qu'**une seule issue.**

- **L'événement impossible**

  C'est l'ensemble vide noté $\emptyset$: **aucune issue ne se réalise.**

- **L'événement certain**

Définitions :

- **Événement**

  Un **événement** A est un sous-ensemble (une partie) de l'univers Ω.

  On dit qu'**une issue réalise un événement** A lorsque cette issue est un résultat appartenant à l'ensemble A.

- **Événement élémentaire**

  C'est un événement qui contient qu'**une seule issue.**

- **L'événement impossible**

  C'est l'ensemble vide noté $\emptyset$: **aucune issue ne se réalise.**

- **L'événement certain**

  C'est l'univers Ω : **toutes les issues se réalisent.**

Exemples :

On lance un dé à 6 faces.

Exemples :

On lance un dé à 6 faces.

1 L'événement A : "obtenir 4" est

Exemples :

On lance un dé à 6 faces.

1. L'événement A : "obtenir 4" est un événement élémentaire.

Exemples :

On lance un dé à 6 faces.

1. L'événement A : "obtenir 4" est un événement élémentaire. $A = \{4\}$.

Exemples :

On lance un dé à 6 faces.

1. L'événement A : "obtenir 4" est un événement élémentaire. $A = \{4\}$.
2. L'événement B : "obtenir un chiffre pair" est

Exemples :

On lance un dé à 6 faces.

1. L'événement A : "obtenir 4" est un événement élémentaire. $A = \{4\}$.
2. L'événement B : "obtenir un chiffre pair" est un événement (non élémentaire).

Exemples :

On lance un dé à 6 faces.

1. L'événement A : "obtenir 4" est un événement élémentaire. $A = \{4\}$.
2. L'événement B : "obtenir un chiffre pair" est un événement (non élémentaire). $B = \{2; 4; 6\}$.

Exemples :

On lance un dé à 6 faces.

1. L'événement A : "obtenir 4" est un événement élémentaire. $A = \{4\}$.
2. L'événement B : "obtenir un chiffre pair" est un événement (non élémentaire). $B = \{2; 4; 6\}$.
3. L'événement C : "obtenir 7" est

Exemples :

On lance un dé à 6 faces.

1. L'événement A : "obtenir 4" est un événement élémentaire. $A = \{4\}$.
2. L'événement B : "obtenir un chiffre pair" est un événement (non élémentaire). $B = \{2; 4; 6\}$.
3. L'événement C : "obtenir 7" est l'événement impossible.

Exemples :

On lance un dé à 6 faces.

1. L'événement A : "obtenir 4" est un événement élémentaire. $A = \{4\}$.
2. L'événement B : "obtenir un chiffre pair" est un événement (non élémentaire). $B = \{2; 4; 6\}$.
3. L'événement C : "obtenir 7" est l'événement impossible. $C = \emptyset$.

Exemples :

On lance un dé à 6 faces.

1. L'événement A : "obtenir 4" est un événement élémentaire. $A = \{4\}$.
2. L'événement B : "obtenir un chiffre pair" est un événement (non élémentaire). $B = \{2; 4; 6\}$.
3. L'événement C : "obtenir 7" est l'événement impossible. $C = \emptyset$.
4. L'événement D : "obtenir un nombre entier" est

Exemples :

On lance un dé à 6 faces.

1. L'événement A : "obtenir 4" est un événement élémentaire. $A = \{4\}$.
2. L'événement B : "obtenir un chiffre pair" est un événement (non élémentaire). $B = \{2; 4; 6\}$.
3. L'événement C : "obtenir 7" est l'événement impossible. $C = \emptyset$.
4. L'événement D : "obtenir un nombre entier" est l'événement certain.

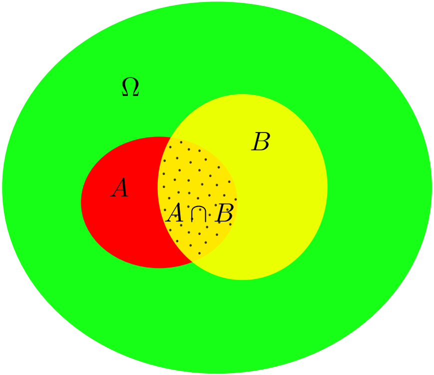
Exemples :

On lance un dé à 6 faces.

1. L'événement A : "obtenir 4" est un événement élémentaire. $A = \{4\}$.
2. L'événement B : "obtenir un chiffre pair" est un événement (non élémentaire). $B = \{2; 4; 6\}$.
3. L'événement C : "obtenir 7" est l'événement impossible. $C = \emptyset$.
4. L'événement D : "obtenir un nombre entier" est l'événement certain. $D = \Omega$.

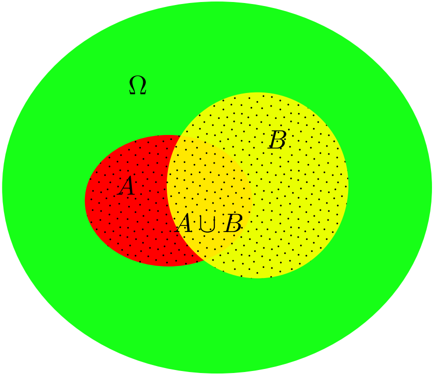
- **Intersection de deux événements**

  L'**intersection** de deux événements A et B est l'événement noté $A \cap B$. Il contient les éléments appartenant à la fois à A **et** à B.



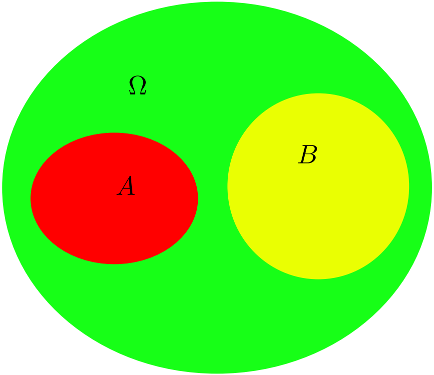
- **Réunion de deux événements**

  La **réunion** de deux événements A et B est l'événement noté $A \cup B$. Il contient les éléments appartenant à A **ou** à B (**ou aux deux**).



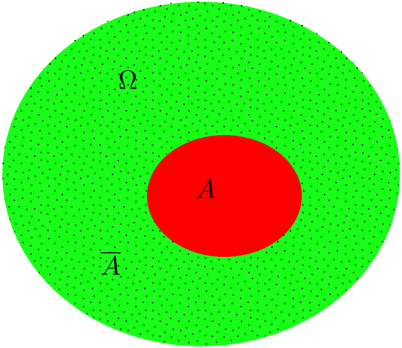
- **Événements incompatibles**

  On dit que les événements A et B sont **incompatibles** quand $A \cap B = \emptyset$.



- **Événement contraire**

  L'**événement contraire** de l'événement A, noté $\overline{A}$, contient tous les éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A.

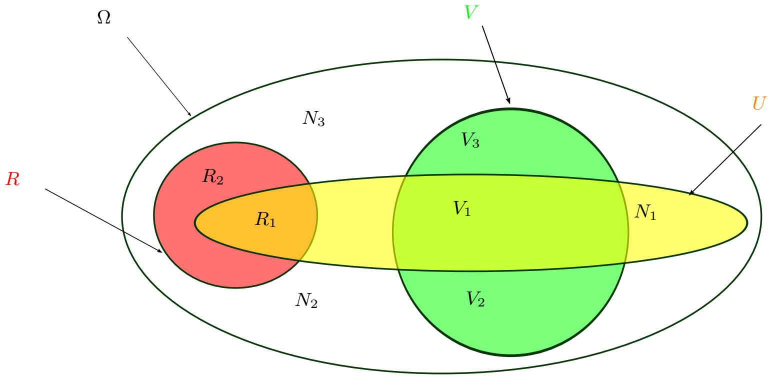


Exemple :

Un sac contient 2 jetons rouges : R_1 et R_2, 3 jetons verts : V_1, V_2 et V_3 et 3 jetons noirs : N_1, N_2 et N_3. On tire un jeton au hasard.

Exemple :

Un sac contient 2 jetons rouges : R_1 et R_2, 3 jetons verts : V_1, V_2 et V_3 et 3 jetons noirs : N_1, N_2 et N_3. On tire un jeton au hasard.



Exemple : (suite)

Alors :

Exemple : (suite)

Alors :

$\Omega =$

Exemple : (suite)

Alors :

$\Omega = \{N_1, N_2, N_3, R_1, R_2, V_1, V_2, V_3\}$.

Exemple : (suite)

Alors :

$\Omega = \{N_1, N_2, N_3, R_1, R_2, V_1, V_2, V_3\}$.

V : "tirer un jeton vert"; $V =$

Exemple : (suite)

Alors :

$\Omega =\{N_1, N_2, N_3, R_1, R_2, V_1, V_2, V_3\}$.

V : "tirer un jeton vert"; $V = \{V_1, V_2, V_3\}$.

Exemple : (suite)

Alors :

$\Omega = \{N_1, N_2, N_3, R_1, R_2, V_1, V_2, V_3\}$.

V : "tirer un jeton vert"; $V = \{V_1, V_2, V_3\}$.

R : "tirer un jeton rouge"; R

Exemple : (suite)

Alors :

$\Omega =\{N_1, N_2, N_3, R_1, R_2, V_1, V_2, V_3\}$.

V : "tirer un jeton vert"; $V = \{V_1, V_2, V_3\}$.

R : "tirer un jeton rouge"; $R = \{R_1, R_2\}$.

Exemple : (suite)

Alors :

$\Omega =\{N_1, N_2, N_3, R_1, R_2, V_1, V_2, V_3\}$.

V : "tirer un jeton vert"; $V = \{V_1, V_2, V_3\}$.

R : "tirer un jeton rouge"; $R = \{R_1, R_2\}$.

U : "tirer un jeton numéroté 1"; $U =$

Exemple : (suite)

Alors :

$\Omega = \{N_1, N_2, N_3, R_1, R_2, V_1, V_2, V_3\}$.

V : "tirer un jeton vert"; $V = \{V_1, V_2, V_3\}$.

R : "tirer un jeton rouge"; $R = \{R_1, R_2\}$.

U : "tirer un jeton numéroté 1"; $U = \{N_1, R_1, V_1\}$.

Exemple : (suite)

Alors :

$\Omega = \{N_1, N_2, N_3, R_1, R_2, V_1, V_2, V_3\}$.

V : "tirer un jeton vert"; $V = \{V_1, V_2, V_3\}$.

R : "tirer un jeton rouge"; $R = \{R_1, R_2\}$.

U : "tirer un jeton numéroté 1"; $U = \{N_1, R_1, V_1\}$.

$V \cap U$ est

Exemple : (suite)

Alors :

$\Omega = \{N_1, N_2, N_3, R_1, R_2, V_1, V_2, V_3\}$.

V : "tirer un jeton vert"; $V = \{V_1, V_2, V_3\}$.

R : "tirer un jeton rouge"; $R = \{R_1, R_2\}$.

U : "tirer un jeton numéroté 1"; $U = \{N_1, R_1, V_1\}$.

$V \cap U$ est un événement élémentaire ; $V \cap U =$

Exemple : (suite)

Alors :

$\Omega = \{N_1, N_2, N_3, R_1, R_2, V_1, V_2, V_3\}$.

V : "tirer un jeton vert"; $V = \{V_1, V_2, V_3\}$.

R : "tirer un jeton rouge"; $R = \{R_1, R_2\}$.

U : "tirer un jeton numéroté 1"; $U = \{N_1, R_1, V_1\}$.

$V \cap U$ est un événement élémentaire ; $V \cap U = \{V_1\}$.

Exemple : (suite)

Alors :

$\Omega =\{N_1, N_2, N_3, R_1, R_2, V_1, V_2, V_3\}$.

V : "tirer un jeton vert"; $V = \{V_1, V_2, V_3\}$.

R : "tirer un jeton rouge"; $R = \{R_1, R_2\}$.

U : "tirer un jeton numéroté 1"; $U = \{N_1, R_1, V_1\}$.

$V \cap U$ est un événement élémentaire ; $V \cap U = \{V_1\}$.

$V \cup U =$

Exemple : (suite)

Alors :

$\Omega = \{N_1, N_2, N_3, R_1, R_2, V_1, V_2, V_3\}$.

V : "tirer un jeton vert"; $V = \{V_1, V_2, V_3\}$.

R : "tirer un jeton rouge"; $R = \{R_1, R_2\}$.

U : "tirer un jeton numéroté 1"; $U = \{N_1, R_1, V_1\}$.

$V \cap U$ est un événement élémentaire ; $V \cap U = \{V_1\}$.

$V \cup U = \{N_1, R_1, V_1, V_2, V_3\}$.

Exemple : (suite)

Alors :

$\Omega = \{N_1, N_2, N_3, R_1, R_2, V_1, V_2, V_3\}$.

V : "tirer un jeton vert"; $V = \{V_1, V_2, V_3\}$.

R : "tirer un jeton rouge"; $R = \{R_1, R_2\}$.

U : "tirer un jeton numéroté 1"; $U = \{N_1, R_1, V_1\}$.

$V \cap U$ est un événement élémentaire ; $V \cap U = \{V_1\}$.

$V \cup U = \{N_1, R_1, V_1, V_2, V_3\}$.

V et R sont des événements

Exemple : (suite)

Alors :

$\Omega =\{N_1, N_2, N_3, R_1, R_2, V_1, V_2, V_3\}$.

V : "tirer un jeton vert"; $V = \{V_1, V_2, V_3\}$.

R : "tirer un jeton rouge"; $R = \{R_1, R_2\}$.

U : "tirer un jeton numéroté 1"; $U = \{N_1, R_1, V_1\}$.

$V \cap U$ est un événement élémentaire ; $V \cap U = \{V_1\}$.

$V \cup U = \{N_1, R_1, V_1, V_2, V_3\}$.

V et R sont des événements incompatibles ; $V \cap R = \emptyset$.

Exemple : (suite)

Alors :

$\Omega = \{N_1, N_2, N_3, R_1, R_2, V_1, V_2, V_3\}$.

V : "tirer un jeton vert"; $V = \{V_1, V_2, V_3\}$.

R : "tirer un jeton rouge"; $R = \{R_1, R_2\}$.

U : "tirer un jeton numéroté 1"; $U = \{N_1, R_1, V_1\}$.

$V \cap U$ est un événement élémentaire ; $V \cap U = \{V_1\}$.

$V \cup U = \{N_1, R_1, V_1, V_2, V_3\}$.

V et R sont des événements incompatibles ; $V \cap R = \emptyset$.

$\overline{V}$ est l'événement

Exemple : (suite)

Alors :

$\Omega = \{N_1, N_2, N_3, R_1, R_2, V_1, V_2, V_3\}$.

V : "tirer un jeton vert"; $V = \{V_1, V_2, V_3\}$.

R : "tirer un jeton rouge"; $R = \{R_1, R_2\}$.

U : "tirer un jeton numéroté 1"; $U = \{N_1, R_1, V_1\}$.

$V \cap U$ est un événement élémentaire ; $V \cap U = \{V_1\}$.

$V \cup U = \{N_1, R_1, V_1, V_2, V_3\}$.

V et R sont des événements incompatibles ; $V \cap R = \emptyset$.

$\overline{V}$ est l'événement "tirer un jeton qui n'est pas vert" c'est-à-dire $\overline{V} = R \cup N$.

Proposition :

- $\overline{\Omega} = \emptyset$.
- $\overline{\emptyset} = \Omega$.
- Pour tout événement A on a : $\overline{\overline{A}} = A$; $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$.

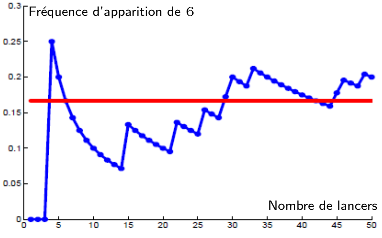
2. Loi de probabilité

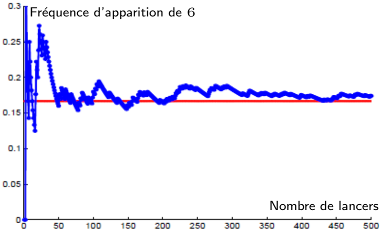
Comme l'indique le titre du chapitre, dans la suite du cours, on se limite aux expériences aléatoires ayant un univers Ω **fini.** Pour modéliser complètement l'expérience aléatoire, on cherche à associer à Ω une application $\mathbb{P}$, appelée **loi de probabilité sur** Ω, qui "mesure", en quelque sorte, la chance que chaque événement de Ω a de se réaliser. Le couple $(\Omega, \mathbb{P})$ sera appelé **espace probabilisé.**

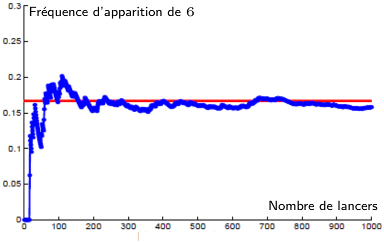
Expérience

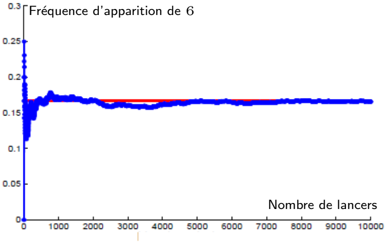
On a simulé (à l'aide d'un ordinateur) un certain nombre de lancers d'un dé équilibré à 6 faces et noté la fréquence d'apparition du chiffre 6. Voici ce que l'on a obtenu :

2. Loi de probabilité









Remarque :

On remarque que la fréquence d'apparition du chiffre 6 se rapproche de $\dfrac{1}{6} \simeq 0,16666$ lorsque le nombre de lancers augmente.

2. Loi de probabilité

Remarque :

On remarque que la fréquence d'apparition du chiffre 6 se rapproche de $\dfrac{1}{6} \simeq 0,16666$ lorsque le nombre de lancers augmente.

Au XVII^e siècle, Jacques Bernouilli démontre le théorème suivant :

2. Loi de probabilité

Remarque :

On remarque que la fréquence d'apparition du chiffre 6 se rapproche de $\dfrac{1}{6} \simeq 0,16666$ lorsque le nombre de lancers augmente.

Au XVII^e siècle, Jacques Bernouilli démontre le théorème suivant :

Théorème : (Loi des grands nombres)

Lorsque l'on répète n fois, de façon indépendante, une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'une issue ω a tendance à se stabiliser, lorsque n devient très grand, autour d'une valeur théorique notée $\mathbb{P}(\{\omega\})$.

2. Loi de probabilité

Remarque :

On remarque que la fréquence d'apparition du chiffre 6 se rapproche de $\dfrac{1}{6} \simeq 0,16666$ lorsque le nombre de lancers augmente.

Au XVII^e siècle, Jacques Bernouilli démontre le théorème suivant :

Théorème : (Loi des grands nombres)

Lorsque l'on répète n fois, de façon indépendante, une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'une issue ω a tendance à se stabiliser, lorsque n devient très grand, autour d'une valeur théorique notée $\mathbb{P}(\{\omega\})$.

Définition :

Jacques Bernouilli définit cette valeur théorique $\mathbb{P}(\{\omega\})$ comme **la probabilité de l'issue ω.**

Proposition :

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω fini, avec $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, $(n \in \mathbb{N}^\star)$, alors :

- $\forall i \in \{1; \ldots; n\}$, $0 \leq \mathbb{P}(\{\omega_i\}) \leq 1$;
- $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \ldots + \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = 1.$

2. Loi de probabilité

Proposition :

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω fini, avec $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, $(n \in \mathbb{N}^\star)$, alors :

- $\forall i \in \{1; \dots; n\}$, $0 \leq \mathbb{P}(\{\omega_i\}) \leq 1$;
- $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \ldots + \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = 1.$

Définition :

La **probabilité d'un événement** A, notée $\mathbb{P}(A)$, est la somme de toutes les probabilités des issues qui le composent.

Exemple :

On lance un dé à 6 faces "truqué" et on observe le nombre obtenu sur la face supérieure. L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Pour modéliser complètement cette expérience il reste à définir une loi de probabilité sur Ω. Pour cela on réalise une étude statistique (en lançant le dé un grand nombre de fois) puis on choisit une distribution de probabilité en accord avec les fréquences observées des issues. Ce peut-être par exemple :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$0,125$	$0,125$	$0,125$	$0,125$	$0,2$	$0,3$

2. Loi de probabilité

Exemple :

On lance un dé à 6 faces "truqué" et on observe le nombre obtenu sur la face supérieure. L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Pour modéliser complètement cette expérience il reste à définir une loi de probabilité sur Ω. Pour cela on réalise une étude statistique (en lançant le dé un grand nombre de fois) puis on choisit une distribution de probabilité en accord avec les fréquences observées des issues. Ce peut-être par exemple :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$0,125$	$0,125$	$0,125$	$0,125$	$0,2$	$0,3$

La probabilité de l'événement A : "obtenir un nombre pair" est :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{2; 4; 6\}) = 0,125 + 0,125 + 0,3 = 0,55.$$

2. Loi de probabilité

Proposition :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- Pour tout événement A, $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
- Pour tout événement A, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- Pour tous événements A et B, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- Pour tous événements A et B, si $A \subseteq B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

3. Calculs de probabilités

3.1 Équiprobabilité sur un ensemble fini

Définition :

Lorsque tous les événements élémentaires d'un univers Ω fini ont la même probabilité, on dit qu'on est dans une situation d'**équiprobabilité** sur Ω.

Dans ce cas on a :

3. Calculs de probabilités

3.1 Équiprobabilité sur un ensemble fini

Définition :

Lorsque tous les événements élémentaires d'un univers Ω fini ont la même probabilité, on dit qu'on est dans une situation d'**équiprobabilité** sur Ω.

Dans ce cas on a :

Théorème :

Si $\mathbb{P}$ est l'équiprobabilité définie sur $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, $(n \in \mathbb{N}^\star)$, on a :

1. $\forall i \in \{1; \ldots; n\}$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \dfrac{1}{n}$.
2. Pour tout événement A on a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre d'élément(s) de } A}{\text{nombre d'élément(s) de } \Omega} = \frac{\text{nombre cas favorable(s) à } A}{\text{nombre de cas possible(s)}}.$$

3. Calculs de probabilités

3.1 Équiprobabilité sur un ensemble fini

Par convention, les expressions telles que "dés équilibrés", " tirage au hasard", "jetons indiscernables au toucher" etc. indiquent que le modèle choisi est celui de l'équiprobabilité, qui ne privilégie aucune issue par rapport à une autre.

3. Calculs de probabilités

3.1 Équiprobabilité sur un ensemble fini

Par convention, les expressions telles que "dés équilibrés", " tirage au hasard", "jetons indiscernables au toucher" etc. indiquent que le modèle choisi est celui de l'équiprobabilité, qui ne privilégie aucune issue par rapport à une autre.

Exemple :

Une expérience aléatoire consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces et à observer la face supérieure. On note A l'événement "le résultat est 3 ou 6". On a :

3. Calculs de probabilités

3.1 Équiprobabilité sur un ensemble fini

Par convention, les expressions telles que "dés équilibrés", " tirage au hasard", "jetons indiscernables au toucher" etc. indiquent que le modèle choisi est celui de l'équiprobabilité, qui ne privilégie aucune issue par rapport à une autre.

Exemple :

Une expérience aléatoire consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces et à observer la face supérieure. On note A l'événement "le résultat est 3 ou 6". On a :

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \text{ et } A = \{3; 6\}.$$

3. Calculs de probabilités

3.1 Équiprobabilité sur un ensemble fini

Par convention, les expressions telles que "dés équilibrés", " tirage au hasard", "jetons indiscernables au toucher" etc. indiquent que le modèle choisi est celui de l'équiprobabilité, qui ne privilégie aucune issue par rapport à une autre.

Exemple :

Une expérience aléatoire consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces et à observer la face supérieure. On note A l'événement "le résultat est 3 ou 6". On a :

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \text{ et } A = \{3; 6\}.$$

Comme nous sommes en situation d'équiprobabilité on obtient :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre d'élément(s) de } A}{\text{nombre d'élément(s) de } \Omega} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Voir poly

Définition/Proposition :

Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur Ω et A un événement de probabilité non nulle. L'application $\mathbb{P}_A$ qui, à tout événement B, associe le nombre

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

définit une loi de probabilité sur Ω appelé **probabilité conditionnelle** (relativement à A).

Exemple :

On lance 2 fois de suite un dé équilibré. A chaque lancer on regarde la chiffre obtenu sur la face supérieure. Quelle est la probabilité que la somme des résultats obtenus soit strictement > 10 sachant que l'un des lancers a donné 6 ?

Exemple :

On lance 2 fois de suite un dé équilibré. A chaque lancer on regarde la chiffre obtenu sur la face supérieure. Quelle est la probabilité que la somme des résultats obtenus soit strictement > 10 sachant que l'un des lancers a donné 6 ? Notons A : "l'un des lancers donne 6" et B : "la somme des résultats obtenus est > 10" alors on a :

Exemple :

On lance 2 fois de suite un dé équilibré. A chaque lancer on regarde la chiffre obtenu sur la face supérieure. Quelle est la probabilité que la somme des résultats obtenus soit strictement > 10 sachant que l'un des lancers a donné 6 ? Notons A : "l'un des lancers donne 6" et B : "la somme des résultats obtenus est > 10" alors on a :

$A =$

$\{(6;1),(6;2),(6;3),(6;4),(6;5),(6;6),(1;6),(2;6),(3;6),(4;6),(5;6)\}$

et

Exemple :

On lance 2 fois de suite un dé équilibré. A chaque lancer on regarde la chiffre obtenu sur la face supérieure. Quelle est la probabilité que la somme des résultats obtenus soit strictement > 10 sachant que l'un des lancers a donné 6 ? Notons A : "l'un des lancers donne 6" et B : "la somme des résultats obtenus est > 10" alors on a :

$A =$

$\{(6;1),(6;2),(6;3),(6;4),(6;5),(6;6),(1;6),(2;6),(3;6),(4;6),(5;6)\}$

et

$$A \cap B = \{(5;6),(6;5),(6;6)\}$$

Exemple :

On lance 2 fois de suite un dé équilibré. A chaque lancer on regarde la chiffre obtenu sur la face supérieure. Quelle est la probabilité que la somme des résultats obtenus soit strictement > 10 sachant que l'un des lancers a donné 6 ? Notons A : "l'un des lancers donne 6" et B : "la somme des résultats obtenus est > 10" alors on a :

$A =$

$\{(6;1),(6;2),(6;3),(6;4),(6;5),(6;6),(1;6),(2;6),(3;6),(4;6),(5;6)\}$

et

$$A \cap B = \{(5;6),(6;5),(6;6)\}$$

donc

$$P_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{3}{11}.$$

Proposition :

Pour tous événements A et B tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A).$$

Définition :

Deux événements A et B sont **indépendants** pour une probabilité $\mathbb{P}$ si :
$\mathbb{P}(A \cap B) = P(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Exemple :

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

Soit les événements :

$\hookrightarrow$ A : "Tirer un as";

$\hookrightarrow$ B : "Tirer un cœur";

$\hookrightarrow$ C : "Tirer un as rouge".

On note $\mathbb{P}$ l'équiprobabilité sur Ω.

Exemple :

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

Soit les événements :

$\hookrightarrow A$: "Tirer un as";

$\hookrightarrow B$: "Tirer un cœur";

$\hookrightarrow C$: "Tirer un as rouge".

On note $\mathbb{P}$ l'équiprobabilité sur Ω.

- $\mathbb{P}(A) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$;

Exemple :

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

Soit les événements :

$\hookrightarrow A$: "Tirer un as";

$\hookrightarrow B$: "Tirer un cœur";

$\hookrightarrow C$: "Tirer un as rouge".

On note $\mathbb{P}$ l'équiprobabilité sur Ω.

- $\mathbb{P}(A) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$;
- $\mathbb{P}(B) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$;

Exemple :

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

Soit les événements :

$\hookrightarrow A$: "Tirer un as";

$\hookrightarrow B$: "Tirer un cœur";

$\hookrightarrow C$: "Tirer un as rouge".

On note $\mathbb{P}$ l'équiprobabilité sur Ω.

- $\mathbb{P}(A) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$;
- $\mathbb{P}(B) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$;
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{32}$.

Exemple :

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

Soit les événements :

$\hookrightarrow$ A : "Tirer un as";

$\hookrightarrow$ B : "Tirer un cœur";

$\hookrightarrow$ C : "Tirer un as rouge".

On note $\mathbb{P}$ l'équiprobabilité sur Ω.

- $\mathbb{P}(A) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$;
- $\mathbb{P}(B) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$;
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{32}$.

Comme

$$\mathbb{P} A \cap B) = \frac{1}{32} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

les événements A et B sont donc indépendants.

Exemple : (suite)

Par ailleurs on a :

Exemple : (suite)

Par ailleurs on a :

- $\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{4}$;

Exemple : (suite)

Par ailleurs on a :

- $\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{4}$;
- $\mathbb{P}(C) = \dfrac{2}{32} = \dfrac{1}{16}$;

Exemple : (suite)

Par ailleurs on a :

- $\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{4}$;
- $\mathbb{P}(C) = \dfrac{2}{32} = \dfrac{1}{16}$;
- $\mathbb{P}(B \cap C) = \dfrac{1}{32}$.

Exemple : (suite)

Par ailleurs on a :

- $\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{4}$;
- $\mathbb{P}(C) = \dfrac{2}{32} = \dfrac{1}{16}$;
- $\mathbb{P}(B \cap C) = \dfrac{1}{32}$.

Comme

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{32} \neq \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$$

les événements B et C ne sont donc pas indépendants.

Proposition :

Si A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}$ alors :

1. $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$ si $\mathbb{P}(A) \neq 0$.
2. $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ si $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
3. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.