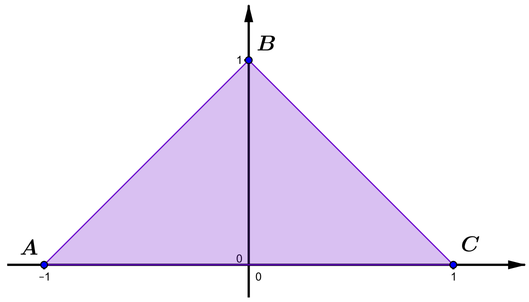
Feuille de TD n° 4

Intégrales multiples

Exercice 8

1)



2) D est l'ensemble des points (x, y) du plan situés

- « en-dessous » de la droite (BC) ;
- « en-dessous » de la droite (AB) ;
- et « au-dessus » de l'axe des abscisses.

Être « au-dessus » de l'axe des abscisses se traduit par $\boxed{y \geq 0}$.
Déterminons maintenant une équation de la droite (AB) puis de la droite (BC).
(AB) a une équation de la forme

$$y = ax + b \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

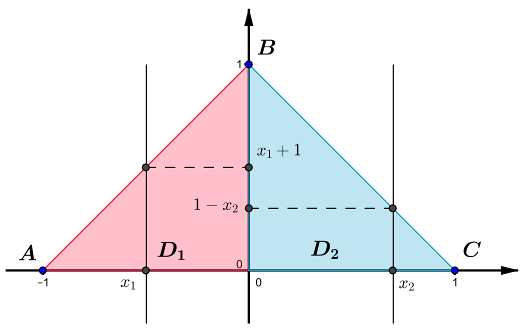
On a :

$$a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{0-1}{-1-0} = 1.$$

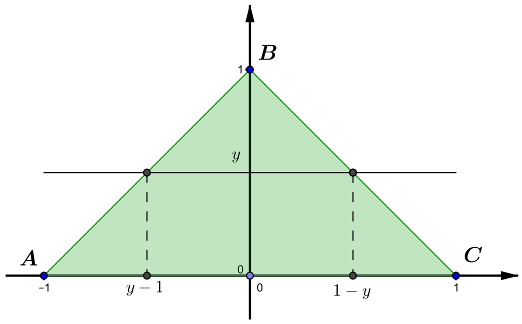
Donc (AB) a pour équation $y = x + b$. Or $A \in (AB)$, donc $y_A = x_A + b$. Ainsi $b = 1$ et $y = x + 1$ est une équation de la droite (AB).
Par un raisonnement analogue, on trouve que $y = 1 - x$ est une équation de la droite (BC).
Donc être « en-dessous » de (AB) se traduit par $\boxed{y \leq x + 1}$ et être « en-dessous » de (BC) se traduit par $\boxed{y \leq 1 - x}$.
Donc finalement

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0; y \leq x + 1 \text{ et } y \leq 1 - x\right\}.$$

3) Si on coupe D à « x constant », on doit écrire D sous la forme d'une réunion de deux ensembles disjoints : D_1 et D_2.



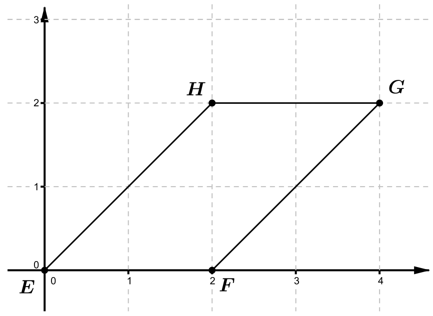
On préfèrera donc couper le domaine D à « y constant ».



D se projette sur (Oy) selon $[0;1]$ et pour tout $y \in [0;1]$, le point de coordonnées (x, y) appartient D si et seulement si $y-1 \leq x \leq 1-y$. Ainsi on a :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} = \iint_D (x+y)^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y} (x+y)^2 \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left[\frac{(x+y)^3}{3} \right]_{x=y-1}^{x=1-y} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{(2y-1)^3}{3} \right) \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 \left(1 - (2y-1)^3 \right) \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{3} \left[y - \frac{(2y-1)^4}{8} \right]_{y=0}^{y=1} \\
&= \frac{1}{3} \left[\left(1 - \frac{1}{8} \right) + \frac{1}{8} \right] \\
&= \frac{1}{3} \text{ u.v.}
\end{aligned}
$$

Exercice 9



1) D correspond à l'ensemble des points (x, y) du plan situés

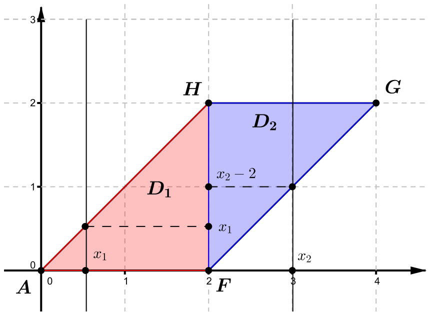
- « en-dessous » de la droite (EH) ;
- « en-dessous » de la droite (HG) ;
- « au-dessus » de la droite (FG) ;
- « au-dessus » de l'axe des abscisses.

Être « au-dessus » de l'axe des abscisses se traduit par $y \geq 0$ et être « en-dessous » de la droite (HG) se traduit par $y \leq 2$.

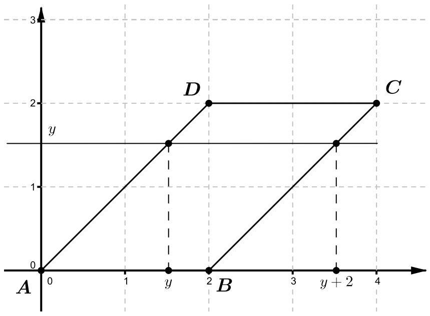
Par un raisonnement analogue à l'exercice précédent on montre que $y = x$ est une équation de (EH) et $y = x - 2$ est une équation de (FG). Donc être « en-dessous » de la droite (EH) se traduit par $y \leq x$ et être « au-dessus » de la droite (FG) se traduit par $y \geq 2x$. On en déduit alors que

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2 \text{ et } x - 2 \leq y \leq x\right\}.$$

2) Si on coupe le domaine D « à x constant », on doit écrire D sous la forme d'une réunion de deux ensembles disjoints : D_1 et D_2.



On préfèrera donc couper le domaine D à « y constant ».



D se projette sur (Oy) selon $[0; 2]$ et pour tout $y \in [0; 2]$, le point de coordonnées (x, y) appartient D si et seulement si $y \leq x \leq y + 2$. Ainsi on a :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} = \iint_D (x+y)^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^2 \left(\int_y^{y+2} (x+y)^2 \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 \left[\frac{(x+y)^3}{3} \right]_{x=y}^{x=y+2} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 \left(\frac{2y+2}{3} - \frac{(2y)^3}{3} \right) \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{3} \int_0^2 \left((2y+2)^3 - (2y)^3 \right) \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{3} \left[\frac{(2y+2)^4}{8} - \frac{(2y)^4}{8} \right]_{y=0}^{y=2} \\
&= \frac{1}{3} \left[\frac{6^4}{8} - \frac{4^4}{8} - \frac{2^4}{8} \right] \\
&= \frac{128}{3} \text{ u.v.}
\end{aligned}
$$

Exercice 11

3) On effectue le changement de variables en posant $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in [0; 2\pi[$. Dans ce cas on remplace $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ par $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ et le domaine D en un domaine Δ. Déterminons le domaine Δ.

$$
\begin{aligned}
\begin{cases} y \geq 0 \\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} r\sin(\theta) \geq 0 \\ (r\cos(\theta) - 1)^2 + (r\sin(\theta))^2 \leq 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} r\sin(\theta) \geq 0 \\ r^2\cos^2(\theta) - 2r\cos(\theta) + \cancel{1} + r^2\sin^2(\theta) \leq \cancel{1} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} r\sin(\theta) \geq 0 \\ r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) - 2r\cos(\theta) \leq 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} r\sin(\theta) \geq 0 \\ r^2 - 2r\cos(\theta) \leq 0 \text{ car } \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} r\sin(\theta) \geq 0 \\ r(r - 2\cos(\theta)) \leq 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } \begin{cases} \sin(\theta) \geq 0 \\ r - 2\cos(\theta) \leq 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ car si } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \text{ on aurait } r \leq 2\cos(\theta) \leq 0 \text{ ce qui est absurde!} \\ r \leq 2\cos(\theta) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Donc finalement

$$
\Delta = \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } 0 \leq r \leq 2\cos(\theta) \right\}.
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} = \iint_D y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_\Delta r\sin(\theta)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos(\theta)} r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3 \sin(\theta)}{3} \right]_0^{2\cos(\theta)} \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8\cos^3(\theta)\sin(\theta)}{3}\,\mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(\theta)\,(\cos(\theta))'\,\mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{8}{3}\left[\frac{\cos^4(\theta)}{4}\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{8}{3}\left[\frac{\cos^4(\frac{\pi}{2})}{4} - \frac{\cos^4(0)}{4}\right] \\
&= \frac{2}{3}\ \text{u.v.}
\end{aligned}
$$