Feuille de TD n^{o} 1

Quelques corrections

Exercice 15

Notons

- d la distance AB (en km) ;
- v_1 la vitesse moyenne sur la première moitié du trajet ;
- v_2 la vitesse moyenne sur la deuxième moitié du trajet ;
- t_1 la durée (en h) de la première moitié du trajet ;
- t_2 la durée (en h) de la deuxième moitié du trajet ;
- $V(x)$ la vitesse moyenne sur tout le trajet.

Déterminons une expression de $V(x)$ en fonction de x.
D'après l'énoncé on a :

$$v_1 = 20 \text{ km/h et } v_2 = x \text{ km/h}.$$

Or

$$v_1 = \frac{\frac{d}{2}}{t_1} \text{ et } v_2 = \frac{\frac{d}{2}}{t_2}.$$

Donc

$$t_1 = \frac{d}{2v_1} = \frac{d}{40} \text{ et } t_2 = \frac{d}{2v_2} = \frac{d}{2x}.$$

Donc :

$$V(x) = \frac{d}{t_1 + t_2} = \frac{d}{\frac{d}{40} + \frac{d}{2x}} = \frac{\cancel{d}}{\cancel{d}\left(\frac{1}{40} + \frac{1}{2x}\right)} = \frac{80x}{2x+40} = \frac{40x}{x+20}.$$

Maintenant déterminons les valeurs de x pour lesquelles la vitesse moyenne est supérieure ou égale à 15 km/h. Il s'agit de résoudre sur $[0; +\infty[$ (car x correspond à une distance !) l'inéquation

$$V(x) \geq 15.$$

On a :

$$\begin{aligned} V(x) \geq 15 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{40x}{x+20} \geq 15 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{40x}{x+20} - 15 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{40x - 15(x+20)}{x+20} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{25x-300}{x+20} \geq 0. \end{aligned}$$

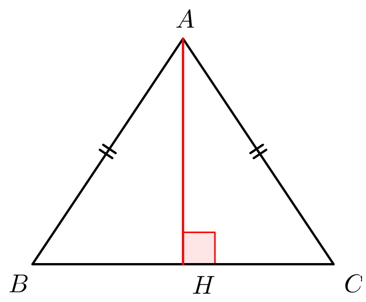
On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-20		12		$+\infty$
$25x-300$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+20$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{25x-300}{x+20}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Donc $V(x) \geq 15 \Leftrightarrow x \in [12;+\infty[$ c'est-à-dire la vitesse moyenne est supérieure ou égale à 15 km/h si et seulement si x est supérieur ou égal à 12 km.

Exercice 17

Notons H le point l'intersection de la droite (BC) et de la hauteur issue du sommet A.



BUT : déterminer les distances AB et BC.

On sait que le périmètre de ABC vaut 16 cm donc

$$2AB + BC = 16.$$

De plus l'aire de ABC vaut un quart de l'aire du carré construit sur $[BC]$ donc

$$\frac{AH \times BC}{2} = \frac{BC^2}{4}.$$

On obtient ainsi le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} 2AB + BC = 16 \\ \dfrac{AH \times BC}{2} = \dfrac{BC^2}{4} \end{cases}$$

Or

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2AB + BC = 16 \\ AH = \dfrac{BC}{2} \end{cases}$$

Cependant ce système seul ne suffit pas pour conclure car la distance AH est inconnue. Mais on sait que le triangle AHB est rectangle en H. Donc d'après le théorème de Pythagore (encore lui !) on a :

$$AH^2 + BH^2 = AB^2.$$

Or

$$BH = \frac{BC}{2}$$

car (AH) est la hauteur issue de A est donc aussi la médiane issue de A car ABC est isocèle en A. Donc

$$AH^2 + BH^2 = AB^2 \Leftrightarrow \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = AB^2 \Leftrightarrow 2 \times \frac{BC^2}{4} = AB^2 \Leftrightarrow BC^2 = 2AB^2.$$

Donc $BC = \sqrt{2}AB$ car $AB > 0$ et $BC > 0$. Donc finalement on a :

$$\left\{\begin{array}{l} 2AB + BC = 16 \\ BC = \sqrt{2}AB \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2AB + \sqrt{2}AB = 16 \\ BC = \sqrt{2}AB \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (2+\sqrt{2})AB = 16 \\ BC = \sqrt{2}AB \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} AB = \dfrac{16}{2+\sqrt{2}} \\ BC = \sqrt{2}AB \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} AB = \dfrac{16(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} \\ BC = \sqrt{2}AB \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} AB = 8(2-\sqrt{2}) \\ BC = 8\sqrt{2}(2-\sqrt{2}) \end{array}\right. .$$

Conclusion : $AB = 8(2-\sqrt{2})$ et $BC = 8\sqrt{2}(2-\sqrt{2})$.