Correction de l'exercice n^o 19

Calculons $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{2(1+x^2)}{3-4x^2+x^4}\,\mathrm{d}x$.

Posons $F(x) = \dfrac{2(1+x^2)}{3-4x^2+x^4}$. $F(x)$ s'écrit sous la forme $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ avec $P(x) = 2(1+x^2)$ et $Q(x) = 3-4x^2+x^4$.

► On remarque que $P(x)$ ne possède pas de racine réelle donc $P(x)$ et $Q(x)$ n'ont pas de racine commune ainsi la fraction rationnelle $F(x)$ est irréductible.

► $\deg(P) = 2$ et $\deg(Q) = 4$ donc $\deg(P) < \deg(Q)$.

► Montrons que $Q(x)$ ne possède que des racines simples réelles et factorisons $Q(x)$. Pour cela on pose $X = x^2$ pour se ramener à un polynôme de degré 2. Donc

$$Q(x) = X^2 - 4X + 3.$$

Ainsi

$$Q(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; X^2 - 4X + 3 = 0.$$

On a $\Delta_{X^2-4X+3} = 4$ donc

$$\begin{aligned}
Q(x) = 0 \;&\Leftrightarrow\; X = \frac{4-2}{2} \text{ ou } X = \frac{4+2}{2}\\
&\Leftrightarrow\; X = 1 \text{ ou } X = 3\\
&\Leftrightarrow\; x^2 = 1 \text{ ou } x^2 = 3\\
&\Leftrightarrow\; x = -1 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x - \sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Ainsi $Q(x)$ ne possède que des racines simples réelles et on a

$$Q(x) = (x+1)(x-1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}).$$

D'après ce qui précède et d'après le cours on sait qu'il existe des réels a, b, c et d (uniques) tels que

$$\frac{2(1+x^2)}{3-4x^2+x^4} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+\sqrt{3}} + \frac{d}{x-\sqrt{3}}.$$

Déterminons a, b, c et d.
On a :

► $a = [F(x)(x+1)]_{x=-1} = \left[\dfrac{2(1+x^2)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}\right]_{x=-1} = \left[\dfrac{2(1+x^2)}{(x-1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}\right]_{x=-1} = 1.$

► $b = [F(x)(x-1)]_{x=1} = \left[\dfrac{2(1+x^2)\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}\right]_{x=1} = \left[\dfrac{2(1+x^2)}{(x+1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}\right]_{x=1} = -1.$

► $c = \left[F(x)(x+\sqrt{3})\right]_{x=-\sqrt{3}} = \left[\dfrac{2(1+x^2)\cancel{(x+\sqrt{3})}}{(x+1)(x-1)\cancel{(x+\sqrt{3})}(x-\sqrt{3})}\right]_{x=-\sqrt{3}} = \left[\dfrac{2(1+x^2)}{(x+1)(x-1)(x-\sqrt{3})}\right]_{x=-\sqrt{3}} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}.$

► $d = \left[F(x)(x-\sqrt{3})\right]_{x=\sqrt{3}} = \left[\dfrac{2(1+x^2)\cancel{(x-\sqrt{3})}}{(x+1)(x-1)(x+\sqrt{3})\cancel{(x-\sqrt{3})}}\right]_{x=\sqrt{3}} = \left[\dfrac{2(1+x^2)}{(x+1)(x-1)(x+\sqrt{3})}\right]_{x=\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}.$

Donc

$$F(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{x+\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{x-\sqrt{3}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int \frac{2(1+x^2)}{3-4x^2+x^4}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{x+\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{x-\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln\left(|x+1|\right) - \ln\left(|x-1|\right) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\ln\left(|x+\sqrt{3}|\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\ln\left(|x-\sqrt{3}|\right) + \mathrm{cste}
\end{aligned}$$