Feuille de TD n° 1

Équations différentielles

I. Équations différentielles du premier ordre : premiers exemples

Exercice 1

Voici une démonstration du théorème suivant (vu dans le cours) :

<u>Théorème :</u> Considérons l'équation différentielle

$$y' + a(t)y = 0$$

où a est une fonction définie et continue sur un intervalle I. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit sous la forme

$$y : t \longmapsto Ke^{-A(t)}$$

où A est une primitive de a sur I et K une constante réelle.

Démonstration : Comme la fonction a est continue sur I elle admet une primitive A sur I (cf. cours MAT1). On a :

$$\begin{aligned}
y' + a(t)y = 0 &\Leftrightarrow (y' + a(t)y)e^{A(t)} = 0.e^{A(t)} \\
&\Leftrightarrow (y' + a(t)y)e^{A(t)} = 0 \\
&\Leftrightarrow y'e^{A(t)} + a(t)ye^{A(t)} = 0 \\
&\Leftrightarrow y'e^{A(t)} + yA'(t)e^{A(t)} = 0 \qquad \text{On reconnait la forme } u'v + uv' = (uv)'. \\
&\Leftrightarrow \left(ye^{A(t)}\right)' = 0 \\
&\Leftrightarrow ye^{A(t)} = K \qquad \text{où } K \text{ est une constante réelle.} \\
&\Leftrightarrow y = Ke^{-A(t)}
\end{aligned}$$

CQDF.

Pour s'entrainer à la maison

Lorsque vous écrivez votre solution il faut que celle-ci soit **RÉDIGÉE** avec toutes les explications nécessaires pour être compréhensible par tous. Quand vous introduisez une nouvelle notation vous devez expliquer à quoi elle correspond : une fonction, une constante réelle, un intervalle etc. Faire des mathématiques ne signifie pas écrire le moins possible de mots français.

Voici une proposition de rédaction de la solution de la question n° 1 de l'exercice « Pour s'entrainer à la maison ».

Résolvons sur $]-\infty;0[$ l'équation différentielle

$$xy' + y = 0 \qquad (E).$$

On a :

$$(E) \Leftrightarrow y' + \frac{y}{x} = 0.$$

On peut en effet diviser l'équation (E) par x car $x \neq 0$ puisque d'après l'énoncé $x \in]-\infty;0[$.
Les solutions de (E) sont donc les solutions de l'équation différentielle

$$y' + \frac{y}{x} = 0.$$

$y' + \frac{y}{x} = 0$ s'écrit sous la forme $y' + a(x)y = 0$ avec $a : x \longmapsto \frac{1}{x}$ continue sur $]-\infty;0[$.
Notons A **UNE** primitive de a sur $]-\infty;0[$ (remarque : A existe car a est continue sur $]-\infty;0[$). Prenons par exemple

$$A : x \longmapsto \ln(|x|) \text{ ne pas oublier la valeur absolue!}$$

Donc d'après un théorème du cours les solutions de $y' + \frac{y}{x} = 0$ et donc de (E) sont les fonctions

$$y : x \longmapsto Ke^{-A(x)} = Ke^{-\ln(|x|)} = \frac{K}{e^{\ln(|x|)}} = \frac{K}{|x|}$$

avec K une constante réelle. Si on note S_E l'ensemble des solutions de (E) alors on a :

$$S_E = \left\{ y : x \longmapsto \frac{K}{|x|} \mid K \in \mathbb{R} \right\}.$$

◇ Résoudre sur $\mathbb{R}$, $y' + 2y = 0$.

⇝ **Réponse :** $y \longmapsto Ke^{-2x}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

◇ Résoudre sur $\mathbb{R}$, $y' + xy = 0$.

⇝ **Réponse :** $y \longmapsto Ke^{-\frac{x^2}{2}}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

◇ Résoudre sur $\mathbb{R}$, $y' + x^2y = 0$ avec $y(0) = 1$.

⇝ **Réponse :** $y \longmapsto e^{-\frac{x^3}{3}}$.

◇ Résoudre sur sur $\mathbb{R}$, $x + yy' = 0$.

⇝ **Réponse :** $y \longmapsto \sqrt{-x^2 + 2K}$ ou $y \longmapsto -\sqrt{-x^2 + 2K}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

II. Équations différentielles linéaires du premier ordre avec second membre

Pour s'entrainer à la maison

◇ Résoudre sur $\mathbb{R}$, $y' - 2xy = \text{sh}(x) - 2x\text{ch}(x)$ avec $y(0) = -1$.

⇝ **Réponse :** $y \longmapsto -2e^{x^2} + \text{ch}(x)$.

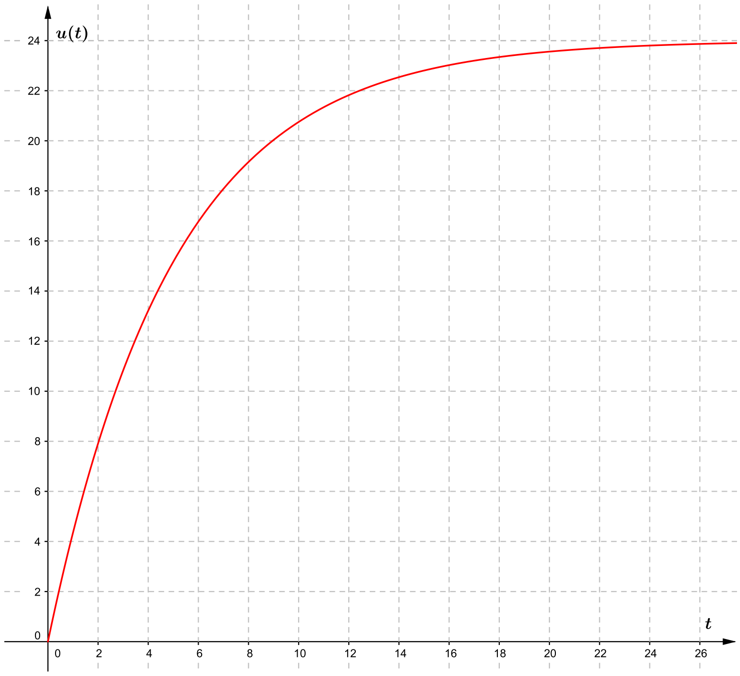
◇ Résoudre sur $]0; +\infty[$, $xy' + y = \dfrac{1}{25 + x^2}$.

⇝ **Réponse :** $y \longmapsto \dfrac{K}{x} + \dfrac{1}{5x}\arctan\left(\dfrac{x}{5}\right)$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (Circuit électrique)

1) $u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

2) On remarque que la tension aux bornes du condensateur croit avec le temps et vient tendre vers la valeur de E. En effet comme $\lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = 0$, par somme on en déduit que $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = E$.



3) $u(5\tau) = 23,84$ V et $\dfrac{u(5\tau)}{E} = 99,3\%$.

III. Équations différentielles linéaires du deuxième ordre

Pour s'entrainer à la maison

◇ $y'' - 2y' + 5y = x^2$.

⇝ **Réponse :** $y \longmapsto e^x\left(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)\right) + \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{4x}{25} - \dfrac{2}{125}$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

◇ $y'' - y' = x^2$.

⇝ **Réponse :** $y \longmapsto C_1 + C_2e^x - \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 2x$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

◇ $y'' - 2y' + y = e^{-x}$.

⇝ **Réponse :** $y \longmapsto e^x(C_1x + C_2) + \dfrac{e^{-x}}{4}$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

◇ $y'' - 2y' + y = e^{x}$.

⇝ **Réponse :** $y \longmapsto e^x(C_1x + C_2) + \dfrac{x^2}{2}e^x$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

◇ $y'' - y' - 2y = 3e^{-x}$.

⇝ **Réponse :** $y \longmapsto C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - xe^{-x}$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

◇ $y'' + y' - y = 2\cos(3x)$.

⇝ **Réponse :** $y \longmapsto C_1e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}x} + C_2e^{\frac{-\sqrt{5}-1}{2}x} - \dfrac{20}{109}\cos(3x) + \dfrac{6}{109}\sin(3x)$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

◇ $y'' + y' = 3\sin(x) - 2\cos(x)$.

⇝ **Réponse :** $y \longmapsto C_1e^{-x} + C_2 - \dfrac{1}{2}\cos(x) - \dfrac{5}{2}\sin(x)$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

◇ $y'' + y = 2\sin(x) - 2\cos(x)$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

⇝ **Réponse :** $y \longmapsto (1-x)(\cos(x) + \sin(x))$.

Exercice 7 (Système mécanique)

1) $z(t) = -2e^{-t} + 5e^{-\frac{t}{5}} + 2$.

2) On remarque que la cote du centre de gravité décroit quand le temps augmente et vient tendre vers 2. En effet comme $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{-X} = 0$, par somme on en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty} z(t) = 2$.