Feuille de TD n° 2

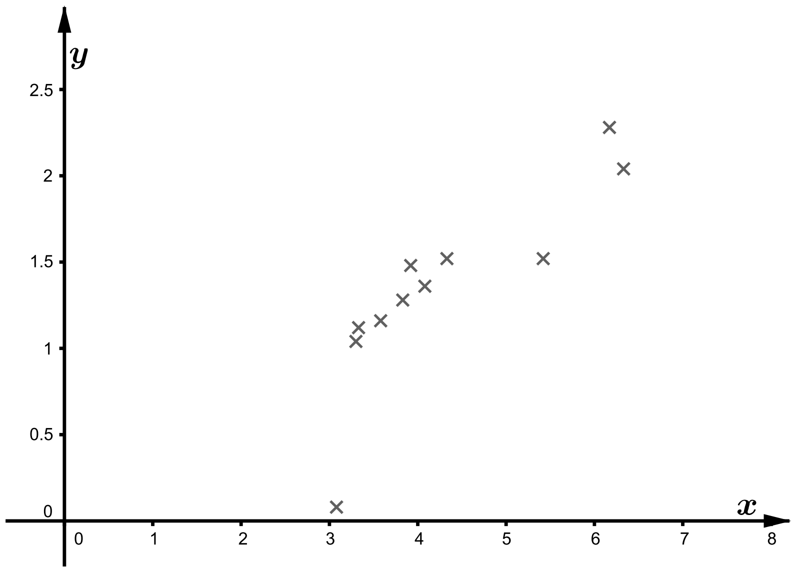
Quelques corrections

Exercice 3

Pour la construction de maisons en Côte-d'Ivoire, on a utilisé des parpaings en géobeton, matériau obtenu en compressant de la terre.
Un laboratoire d'Abidjan a réalisé des essais de résistance à la compression.
Le tableau suivant donne les mesures obtenues pour 13 murs (notés $M_1, \ldots, M_{13}$) constitués de parpaings provenant de la même fabrication.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}
Résistance x des parpaings en Mégapascal	6,17	6,5	$3,08$	$3,58$	$3,33$	$4,08$	$3,3$	$3,92$	$4,33$	$4,5$	$6,33$	$3,83$	$5,42$
Résistance y du mur en Mégapascal	$2,28$	$2,25$	$0,8$	$1,16$	$1,12$	$1,36$	$1,04$	$1,48$	$1,52$	$1,36$	$2,04$	$1,28$	$1,52$

1)



2) Une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés est donnée par

$$y = ax + b$$

avec

$$a = \frac{cov(X,Y)}{V(X)} \text{ et } b = \overline{y} - a\overline{x}.$$

Explications des notations :

- $\overline{x}$ (resp. $\overline{y}$) est la moyenne de la série statistique X (resp. Y) ;
- $cov(X,Y)$ est la covariance de la série statistique double.
- $V(X)$ est la variance de la série statistique X.

On a :

$$cov(X,Y) = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right) - \overline{x}\ \overline{y}$$

et

$$V(X) = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - \overline{x}^2$$

où

- N désigne l'effectif total. Ici $N = 13$.
- x_i (respectivement y_i) la valeur n$^{\text{o}}$ i de la série X (respectivement Y).

Remarque : $V(X) = cov(X,X)$.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}
X	6,17	6,5	3,08	3,58	3,33	4,08	3,3	3,92	4,33	4,5	6,33	3,83	5,42
Y	2,28	2,25	0,8	1,16	1,12	1,36	1,04	1,48	1,52	1,36	2,04	1,28	1,52
X^2	38,0689	42,25	9,4864	12,8164	11,0889	16,6464	10,89	15,3664	18,7489	20,25	40,0689	14,6689	29,3764
Y^2	5,1984	5,0625	0,64	1,3456	1,2544	1,8496	1,0816	2,1904	2,3104	1,8496	4,1616	1,6384	2,3104
XY	14,0676	14,625	2,464	4,1528	3,7296	5,5488	3,432	5,8016	6,5816	6,12	12,9132	4,9024	8,2384

De ce tableau on en déduit les calculs suivants :

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) = 4,49 \text{ Mg et } \overline{y} = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right) \simeq 1,4777 \text{ Mg.}$$

Donc

$$\overline{x}\ \overline{y} \simeq 6,6349 \text{ Mg}^2;\ \overline{x}^2 = 20,1601 \text{ Mg}^2 \text{ et } \overline{y}^2 \simeq 2,1836 \text{ Mg}^2.$$

Par ailleurs

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right) \simeq 7,1213 \text{ Mg}^2.$$

Donc

$$cov(X,Y) = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right) - \overline{x}\ \overline{y} \simeq 0,4864 \text{ Mg}^2 \text{ et } V(X) = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - \overline{x}^2 \simeq 1,3573 \text{ Mg}^2.$$

Donc finalement

$$a = \frac{cov(X,Y)}{V(X)} \simeq 0,3584 \text{ Mg}$$

et

$$b = \overline{y} - a\overline{x} \simeq -0,1315 \text{ Mg.}$$

Donc l'équation cherchée est

$$y = 0,3584x - 0,1315.$$

3) Le coefficient de corrélation linéaire $r_{X,Y}$ se calcule avec la formule

$$r_{X,Y} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

où $V(Y)$ correspond à la variance de la série statistique Y. Après calcul on trouve :

$$V(Y) = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2\right) - \overline{y}^2 \simeq 0,1928.$$

Donc
$$r_{X,Y} \simeq 0,9510.$$
Comme $|r_{X,Y}| \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ on en déduit que l'ajustement du nuage de points par la droite d'équation $y = 0,3584x - 0,1315$ est acceptable.

4) Si $x = 5$ alors $y = 0,3584 \times 5 - 0,1315 \simeq 1,6605$. Donc On peut s'attendre à avoir une résistance de compression de $1,6605$ Mg environ pour un mur constitué de parpaings ayant une résistance de compression de 5 Mg.