

Pour un bon départ en Mathématiques

— Documents et calculatrice interdits —

Exercice 24 (Vecteurs)

1) On a

$$\overrightarrow{AD} = (x_D - x_A; y_D - y_A).$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} &= (x_C - x_A; y_C - y_A) + (x_B - x_A; y_B - y_A) \\ &= (2 - (-1); -2 - 2) + (2 - (-1); 3 - 2) \\ &= (3; -4) + (3; 1) \\ &= (6; -3).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_D - x_A = 6 \\ y_D - y_A = -3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = x_A + 6 \\ y_D = y_A - 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = -1 \end{cases}.\end{aligned}$$

2) D'après la relation de Chasles on a :

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA}.$$

Donc

$$(x_E - x_C; y_E - y_C) = (x_A - x_B; y_A - y_B).$$

Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_E - x_C = x_A - x_B \\ y_E - y_C = y_A - y_B \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_E = x_A - x_B + x_C \\ y_E = y_A - y_B + y_C \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -1 \\ y_E = -3 \end{cases}.\end{aligned}$$

3) Déterminons le point F tel que $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CD})$.

On a :

$$\overrightarrow{BF} = (x_F - x_B; y_F - y_B).$$

Par ailleurs

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CD} = (x_E - x_A; y_E - y_A) + (x_D - x_C; y_D - y_C) = (x_E - x_A + x_D - x_C; y_E - y_A + y_D - y_C).$$

Donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CD}) &\Leftrightarrow \begin{cases} x_F - x_B = \frac{1}{2} (x_E - x_A + x_D - x_C) \\ y_F - y_B = \frac{1}{2} (y_E - y_A + y_D - y_C) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_F = \frac{1}{2} (x_E - x_A + x_D - x_C) + x_B \\ y_F = \frac{1}{2} (y_E - y_A + y_D - y_C) + y_B \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_F = \frac{7}{2} \\ y_F = 1 \end{cases} . \end{aligned}$$